Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
3er Examen Parcial (38 %)
Ene-Mar 2018

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución: Como la función exponencial es continua en todo su dominio, $\lim\limits_{x\to a}\exp\big(f(x)\big)=\exp\Big(\lim\limits_{x\to a}f(x)\Big)$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe. Luego,

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(x+e^x)\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'H}}}{=}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x}{x+e^x}\right)=\exp(2)=e^2$$

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\int \operatorname{sech}(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x\overset{\substack{u=e^x\\ \mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x\\ \downarrow}}{=}2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

$$=2\arctan(u)+C=2\arctan\big(e^x\big)+C$$

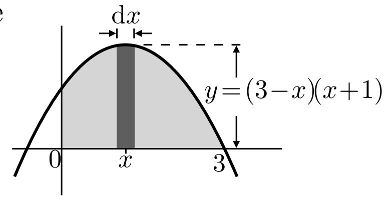
para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 3. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante acotada por la curva de ecuación $y=(3-x)(x+1)$.

a. (4 ptos.) Halle el área de $\mathcal{R}$

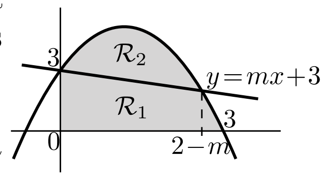
b. (4 ptos.) Para cada $m\in[-1,0]$, la recta $y=mx+3$ divide a $\mathcal{R}$ en dos regiones, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$, siendo $\mathcal{R}_1$ la región que contiene al origen del eje de coordenadas. Halle el valor de m tal que el área de $\mathcal{R}_1$ sea el doble del área de $\mathcal{R}_2$.

Solución: El área de la región $\mathcal{R}$ viene dada por



$$\int_0^3 (3-x)(x+1)\,\mathrm{d}x = 9$$

La recta $y = mx + 3$, con $m \in [-1, 0]$, corta a la parábola $y = (3-x)(x+1)$ en los puntos $(0, 3)$ y $\big(2-m, m(2-m)+3\big)$, ya que



$$-x^2+2x+3 = mx+3 \Rightarrow x = 0 \ \text{ o } \ x = 2-m$$

El área de la región $\mathcal{R}_1$ viene dada por

$$\int_0^{2-m} (mx+3)\,\mathrm{d}x + \int_{2-m}^{3} (3-x)(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\big(46 + 12m - 6m^2 + m^3\big)$$

y el área de la región $\mathcal{R}_2$ viene dada por

$$\int_0^{2-m} \big((3-x)(x+1) - (mx+3)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(2-m)^3$$

Como el área total vale 9 y el área de la región $\mathcal{R}_1$ debe ser el doble del área de la región $\mathcal{R}_2$, entonces el área de la región $\mathcal{R}_2$ debe ser igual a 3. Luego,

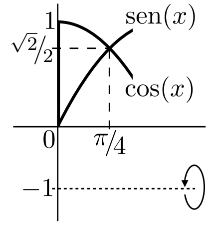
$$\frac{1}{6}(2-m)^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad m = 2 - \sqrt[3]{18}.$$

Pregunta 4. Considere la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$. Sea S el sólido que se genera al hacer rotar esta región alrededor de la recta $y = -1$.

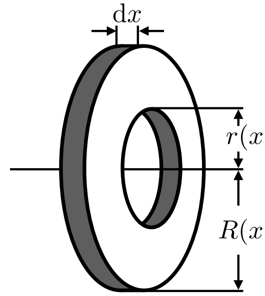
a. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de arandelas.

b. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de cascarones.

c. (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido S.



Solución: La región acotada por las curvas $y = \text{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$ está ilustrada en la figura a la derecha.



Para expresar el volumen mediante el método de arandelas hacemos cortes transversales. Para cada x entre 0 y $\pi/4$ el diferencial de volumen viene dado por

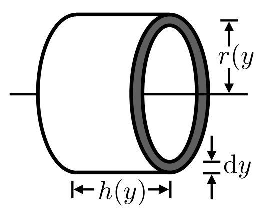
$$\mathrm{d}V = \pi\Big(\big(R(x)\big)^2 - \big(r(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x$$

donde

$$r(x) = 1 + \text{sen}(x) \quad \text{y} \quad R(x) = 1 + \cos(x)$$

Así, el volumen viene dado por

$$\pi\int_0^{\pi/4}\Big(\big(1+\cos(x)\big)^2 - \big(1+\text{sen}(x)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x$$



Para expresar el volumen mediante el método de cascarones hacemos cortes coaxiales. Para cada y entre 0 y 1 el diferencial de volumen viene dado por

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r(y)\, h(y)\,\mathrm{d}y$$

donde

$$r(y) = 1 + y \quad \text{y} \quad h(y) = \begin{cases} \arccos(y) & \text{, si } y \in \left[\sqrt{2}/2, 1\right] \\ \text{arcsen}(y) & \text{, si } y \in \left[0, \sqrt{2}/2\right] \end{cases}$$

Así, el volumen viene dado por

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2}/2}\Big((1+y)\big(\text{arcsen}(y)\big)\Big)\mathrm{d}y + 2\pi\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\Big((1+y)\big(\arccos(y)\big)\Big)\mathrm{d}y$$

Finalmente, el volumen de sólido S es $\pi\big(2\sqrt{2} - 3/2\big)$.

Pregunta 5. (6 ptos.) Determine si la integral impropia $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Solución: Como $x \geq 0$ entonces $0 < e^{-x} \leq 1$, por lo que $0 \leq \frac{e^{-x}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ para todo $x \in (0, \infty)$. Dado que $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ es convergente, pues $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \arctan(b) = \pi/2$, el Criterio de Comparación establece que $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ también es convergente.